niño. Sin embargo, no es un juguete que se le ofrece, sino un material exacto de estudio que hará superar todas las dificultades que encuentran los niños en las escuelas corrientes, donde se enseña a contar y calcular sobre la base del sistema decimal, sin proporcionarle los conocimientos sobre los cuales aquél se edifica.

EL MATERIAL DEMOSTRATIVO DEL SISTEMA DECIMAL

El material que proporcionamos a los niños, para hacerles comprender el sistema decimal, es triple ; está compuesto : de objetos, de cifras numéricas y de palabras.

Los objetos son perlas de color.

Por ahora nos ocuparemos, solamente, del que sirve para demostrar prácticamente la construcción del sistema decimal.

Consiste en perlas sueltas y además en pequeños bastones de diez perlas, enfiladas y fijas sobre un alambre.

Fig. 5
Material del Sistema Decimal
(elementos)

Además existen los cuadrados de perlas construídos con diez bastones de los anteriores, unidos entre sí y formando un solo objeto, que es un «cuadrado de diez» o sean cien perlas. Y finalmente, un cubo construído colocando uno sobre otro, diez de los cuadrados anteriores, convenientemente ligados y constituyendo un solo objeto (fig. 6). Se da un solo cubo de perlas como punto de llegada y límite del sistema.

cuarenta De cada uno de los objetos indicados en los primeros tres grados, existen en número de ~~cincuenta~~ y cinco que es, precisamente, la suma de las unidades contenidas en la serie numérica de uno a nueve. El material se dispone del modo siguiente (fig. 7).

Unido al material de perlas está el de cifras. Este consiste en una serie de carteles, cuyas dimensiones, son proporcionadas a la jerarquía de los números, y para las varias jerarquías, tienen los números distintos colores. Los pequeños carteles para las nueve unidades son iguales entre sí e idénticos en un todo a los usados en la primera numeración (en la que se utilizaban los bastones de madera) ; los carteles para las nueve decenas, en cambio, tienen doble anchura, porque

where they are taught to count and calculate based on the decimal system without being proffered any explanation of the principles on which that system is founded.

Decimal System Demonstration Material

The material that we provide to children, to understand the decimal system, is threefold and composed of objects, numerical symbols and words.

The objects are coloured beads.[15]

For now we will only consider what serves to demonstrate in practical terms the structure of the decimal system.

The objects consist of individual beads and small bars, consisting of a metal wire on which ten beads are threaded and fixed.

Next there are squares of beads, made up of ten of the bead bars described, attached to each other in such a way as to form a single object, a "square of ten", in other words a hundred beads. And finally, a cube is constructed by placing ten of the previous squares one over another, linked together and constituting a single object (Figure 8). This single cube of beads is a point of arrival and a limit to the part of the system introduced here (Figure 9).

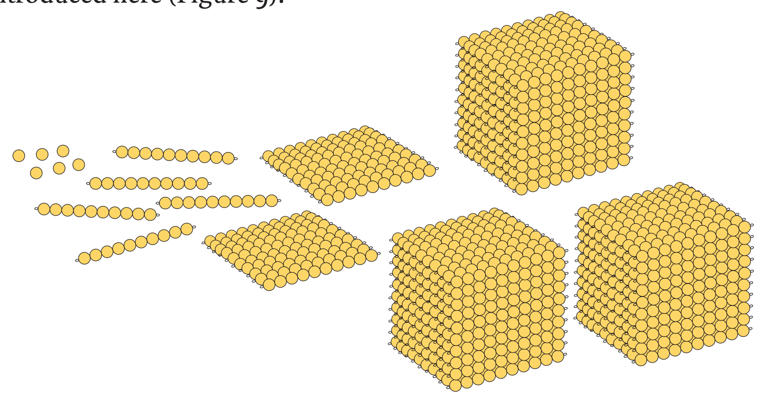


Figure 8
Material of the decimal system (elements)

15 Beads are golden, all the same colour.

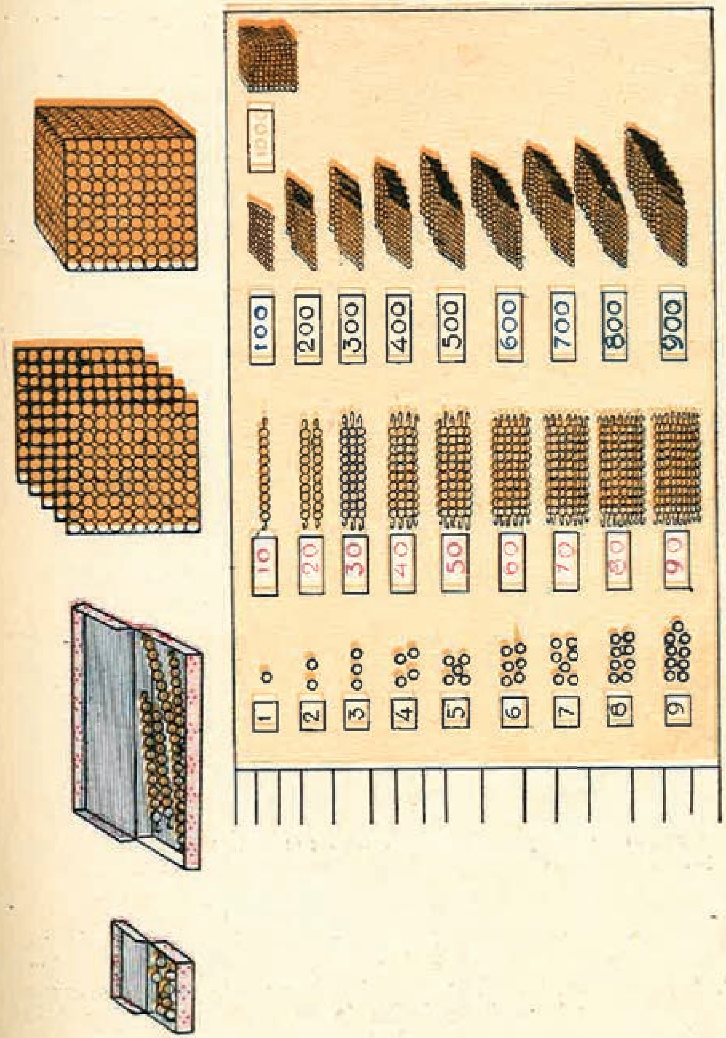


Fig. 6
Exposición del Sistema Decimal en su totalidad

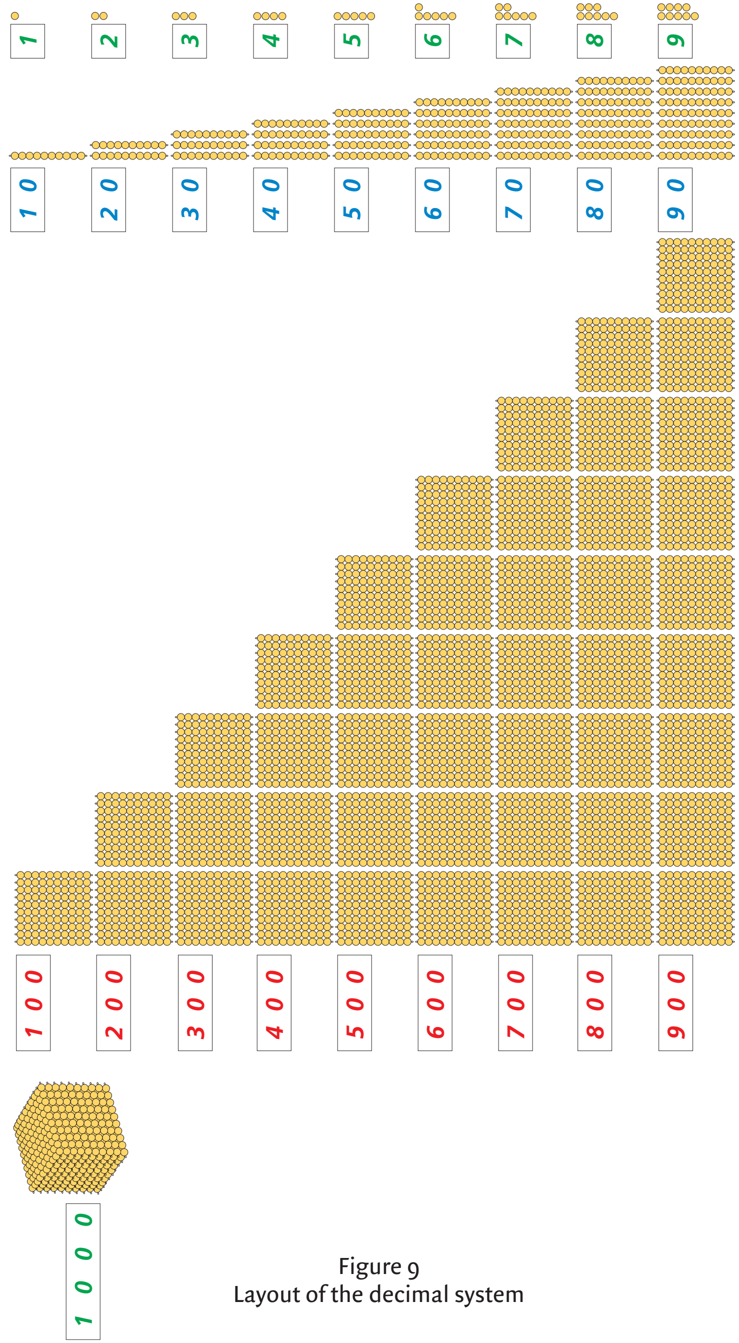


Figure 9
Layout of the decimal system

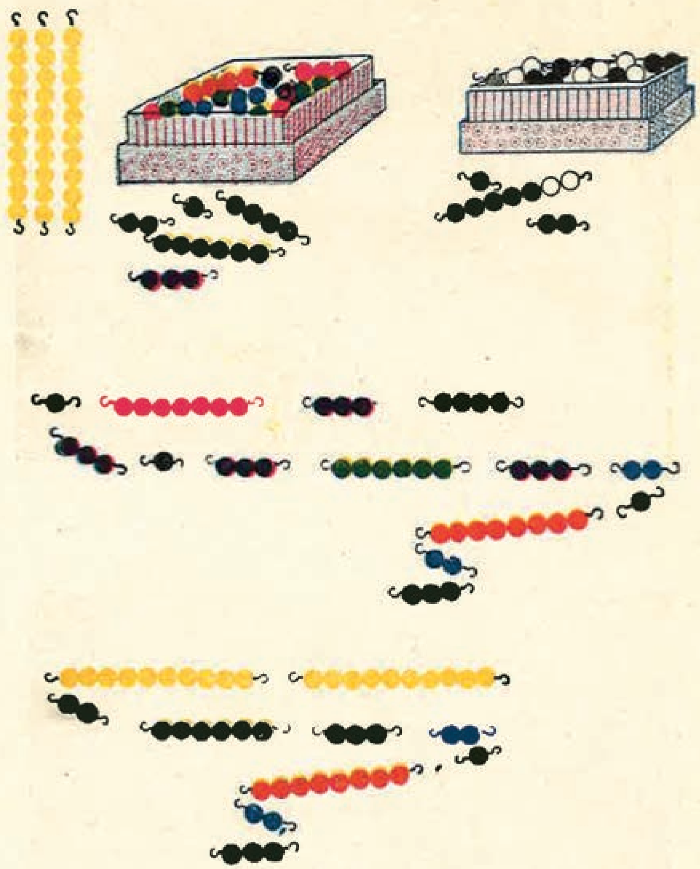


Fig. 22

Other parallel exercises on the decimal system

Snake game

An exercise that can be undertaken parallel to the previous exercise, and whose purpose is to help children carry out small additions of units almost mechanically, preparing them for mental arithmetic, makes use of the bead material representing numerical groups of less than ten: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and 9. This consists of beads threaded onto a metal wire, each group in a different colour (Figure 17).

A large quantity of bead bars is necessary for this exercise. The number represented by each bar is found by counting the beads on the bar. Little by little, however, the colour will help with recognition of the quantity, doing away with the task of having to count the beads one by one. In this way, the number that each bar represents is visible at first sight, due to its characteristic colour. This large amount of bead bars is a mixture of only nine digits.

The exercise begins by lining up bead bars, randomly chosen. The bars are aligned carefully, either on a long table or on the floor and, in order to avoid using too much space, the line is sinuous, reminiscent of the movement of a snake (Figure 25).

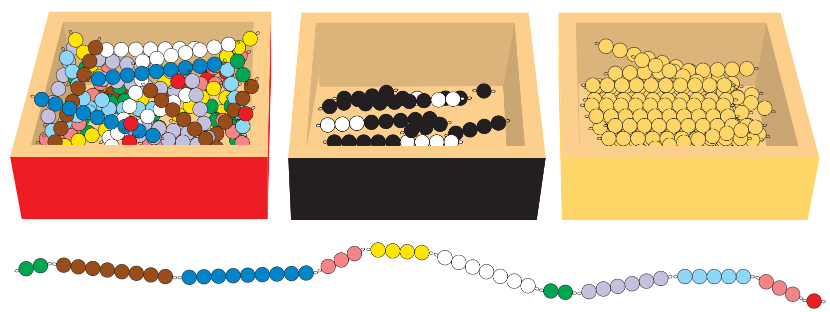


Figure 25
The snake and the search for 10

Counting then starts and, as soon as the number ten has been reached, the bars added together are set aside and are replaced with a bar of ten beads that, as we know, is golden. From there count another ten, and be-

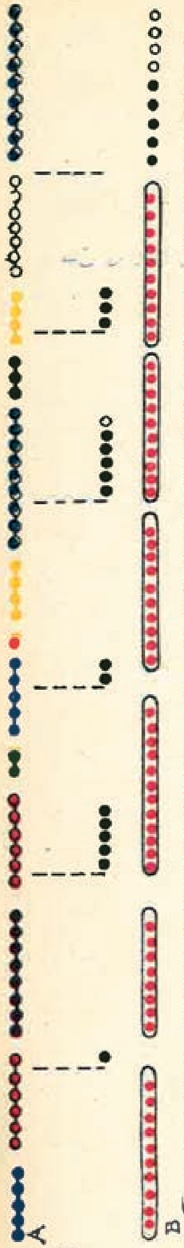


Fig. 23

la figura de serpiente y así se prosigue hasta el fin. Se ve, entonces, que el color anaranjado va devorando aquella fila multicolor y que bastones de igual longitud, todos ellos, van ocupando el lugar de los bastones de distinta longitud. En este caso, el contar ha consistido en transformar en decenas las cantidades menores que están destinadas a fundirse en el diez, base del sistema decimal. El ejercicio pues, consiste en hacer pequeñas sumas en torno al diez, porque cada vez se vuelve a principiar y no se tienen en cuenta los pequeños bastones de diez que se van acumulando a lo largo del camino. Es, pues, un trabajo siempre uniforme que se repite y que concluye por hacer fácil, rápida y mecánica la suma de cifras inferiores a diez. Pero la memorización se logra a través de un largo trabajo de contar unidades y de comprobación de sumas alrededor del diez, es decir, que obliga a reflexionar y a realizar una porción de pequeñas operaciones, de sustracciones que deben realizarse a la par que las sumas, para calcular el exceso que queda después de constituída la nueva decena. Es sobre este detalle sobre el que se desarrolla el ejercicio a través de las variaciones resultantes de los grupos diversos que se encuentran a lo largo de la línea de bastones.

Hagamos una descripción minuciosa de la forma en que se desarrolla el ejercicio.

Supongamos que la línea comienza con los siguientes pequeños bastones: 5 + 6 Fig. 23 (a. Uno es celeste pálido y el otro marrón; la suma es once. Se separan los dos bastones precitados y se sustituyen por otro 10—color anaranjado—más una perla que completa la cantidad comprendida en la suma 5 + 6. Es decir: 5 + 6 = 10 + 1. Este uno pertenece al 6 que fué quitado juntamente con el 5. En efecto: 6 = 5 + 1 y de los dos sumandos, o partes, el 5 sirve para formar el 10 y el 1 representa el resto. Es decir: 6 — 5 = 1. Este 1 permanece y debe contarse después.

Ahora, prosiguiendo, supongamos que los otros pequeños bastones que siguen a las precitadas sean 8 y 6; uno de color violeta y otro de color marrón. La suma que se presenta primeramente es 1 + 8 = 9 (donde el 1 es el resto del último 6). Como el 9 no llega a hacer precisa la sustitución, se continúa la suma 9 + 6 = 15 = 10 + 5. Se ponen pues, aparte el 8, el 6 y el 1 de resto anterior y se substituye el total por un bastón de 10 más uno de 5. Este 5 es el

hold, another ten bar replaces the bars added and so on until the end. We observe the following transformation: little by little the colour gold eats up the multi-coloured line (Figure 25), and bars of equal length gradually take the place of those that were previously all of differing lengths (Figure 26).

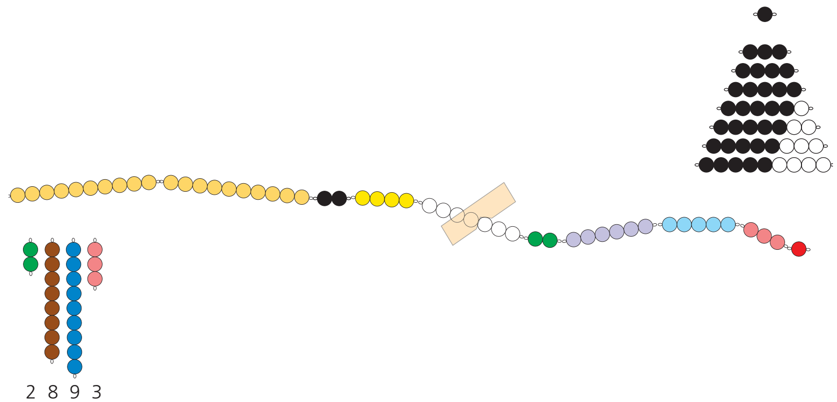
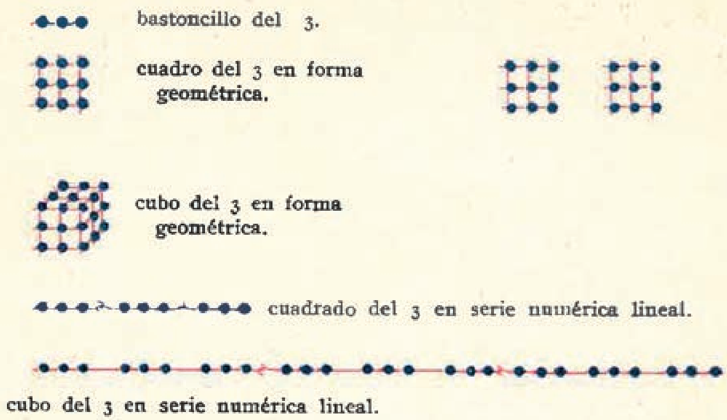


Figure 26
The snake, some 10s counted

In this case, the count is made to transform smaller amounts into tens, the base of the decimal system. The exercise therefore is to make tens with the smaller amounts. At ten, the count begins again and the already counted tens accumulate along the way. It is an unvarying work that is repeated and concludes by making it easy, fast and mechanical to compute sums of digits less than ten. Memorization, however, is achieved through a long process of counting units to ten, forcing one to reflect and carry out a number of small operations; that is, subtractions performed at the same time, in order to work out the quantity in excess of ten once that ten has been formed. Based on this special feature, the exercise is developed in all its varieties arising from the possible combinations of different bead bars in the formation of the snake.

We shall now describe in detail the manner in which the exercise is performed.



Pongamos aquí un ejemplo del material, el relativo al 3 :

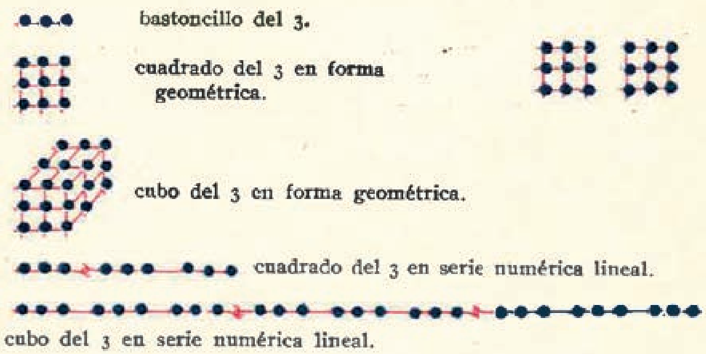


Fig. 130

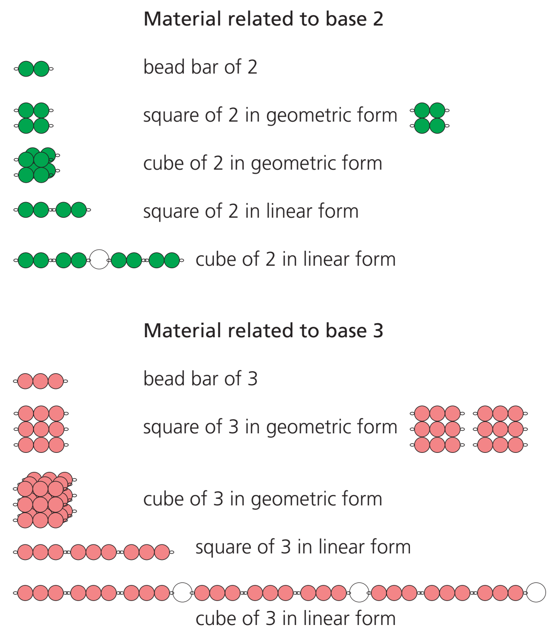


Figure 155
Bar, squares, cube, square and cube chain, for numbers 2 and 3

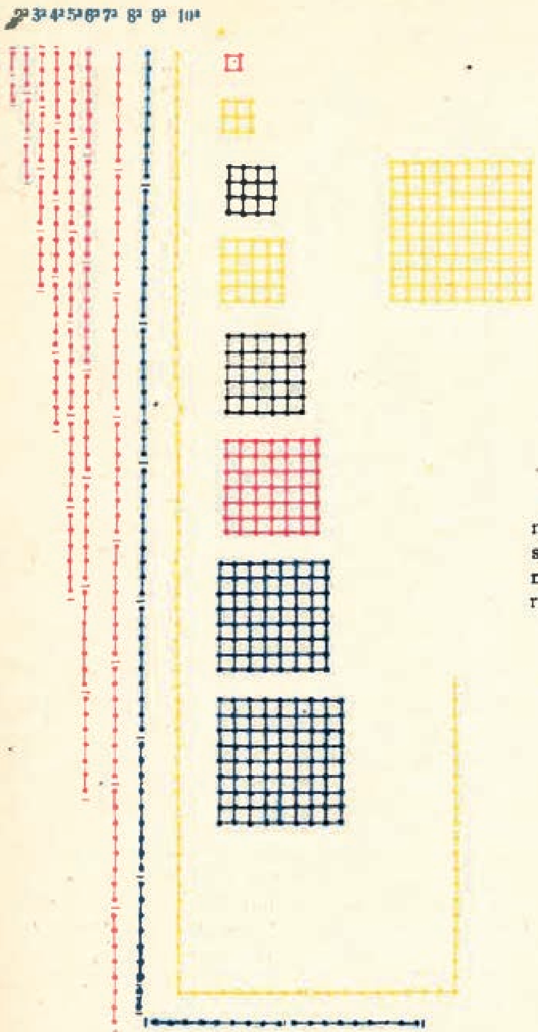
Having enough space to display all the chains in parallel and fully extended, a realistic knowledge of the sequence of the squares of the numbers can be achieved.

The rigid shape of the squares, where beads are linked, allows their superimposition, which highlights the relationship between their numerical size.

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Comparing in the same way the rigid form of the cubes and the cube chains, we observe the great difference between the square and cube of a number.

1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000



Los cuadrados de los números del 1 al 10 representados por cadenas lineales y por cuadrados rígidos.

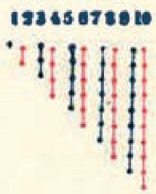
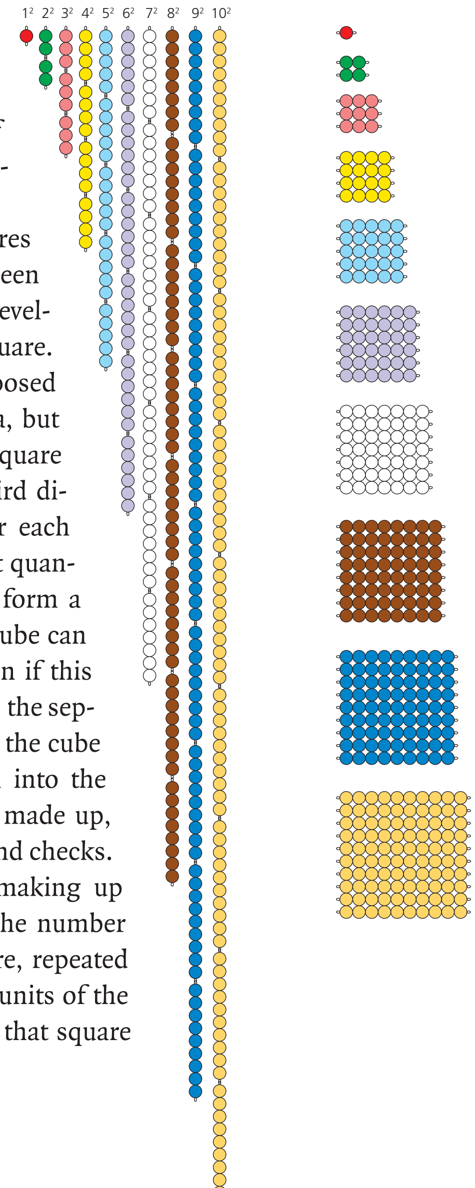


Fig. 131

This gives a sensorial view of the relative lengths of the square and the cube of the numbers and their sequence.
Comparing the rigid squares and the cubes, it will be seen how the third dimension develops, starting from each square. Each cube can be superimposed on its square and vice versa, but the difference between the square and the cube lies in the third dimension. The fact that for each number there is a sufficient quantity of separate squares to form a cube means that the rigid cube can be totally decomposed: even if this cannot in itself be modified, the separate squares can represent the cube as if it were broken down into the parts of which it has been made up, giving rise to calculations and checks.

The number of beads making up each cube is the same as the number of beads forming the square, repeated as many times as there are units of the basic bead bar from which that square has originated (Figure 157).



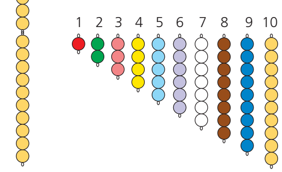


Figure 156
The squares of the numbers 1 to 10 represented by chains and rigid squares

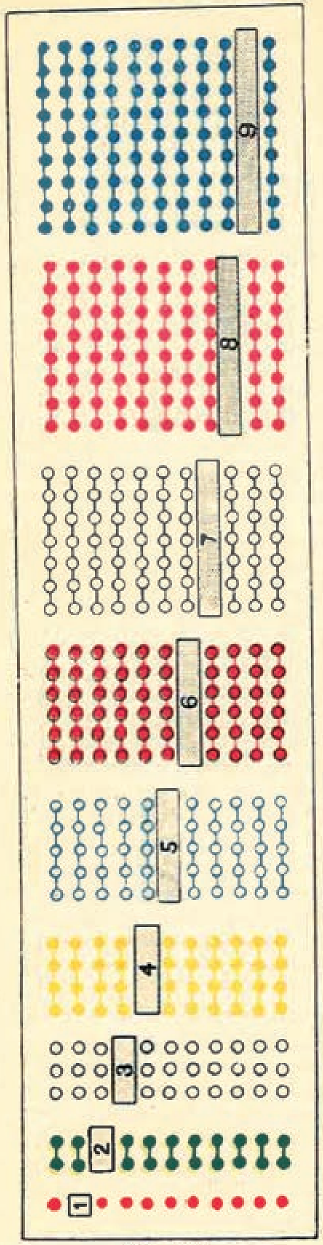


Fig. 140

La figura reproduce en su conjunto todas las combinaciones numéricas halladas en los primeros ejercicios con el material de la tabla pitagórica y se podrían reproducir los mismos cálculos, contando las unidades que se vienen acumulando cada vez que se añade un nuevo bastón a una columna. Aquí, sin embargo, todo permanece estable y ofrece un conjunto que se presta a la observación. En efecto, a cada número sucesivo se ve agrandar el relativo cuadrado y reducirse en altura el rectángulo de abajo. Bajo la unidad hay una alta fila de nueve perlas colocado horizontalmente. Calculando los cuadrados se encuentran los números 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81; aquellos números que señalan los límites en la tabla de multiplicación simplificada. El producto del grupo entero correspondiente a cada bastón se calcula fácilmente, porque siendo diez las filas se obtiene sucesivamente los siguientes números: 10, 20... 80, 90. Y, por esto, reduciendo el cálculo a la forma decimal se podrían colocar inmediatamente debajo de las columnas tantos bastones de diez como corresponden al grupo, o sea 1,2,3,4,... hasta 9. Más allá vendría el cuadrado de 10 que es distinto de todos los grupos porque es entero, mientras hasta 9 los grupos han podido dividirse en dos partes. He aquí, pues, cómo el cuadrado de 10 está fuera de los caracteres de todos los grupos considerados; éste es una unidad superior.

Cuando se quiere calcular el rectángulo que está en la parte inferior de cada cuadrado, se puede hacer por medio de una multiplicación, por una sustracción, o también, por medio de una combinación de ambas operaciones. Por ejemplo, considerando el 4 se puede hallar multiplicando 4 × 6 = 24 o también sustrayendo a 40 el cuadrado de $4^2 = 16$; 40-16 = 24. El cálculo de cada una de las colum-

the number is reached, a space[63] is left and bead bars continue to accumulate in columns. In this simple exercise, the children have found such interest that they prepared a tray with a velvet lining so that the bead bars do not slip. The layout of the material is shown in Figure 163.

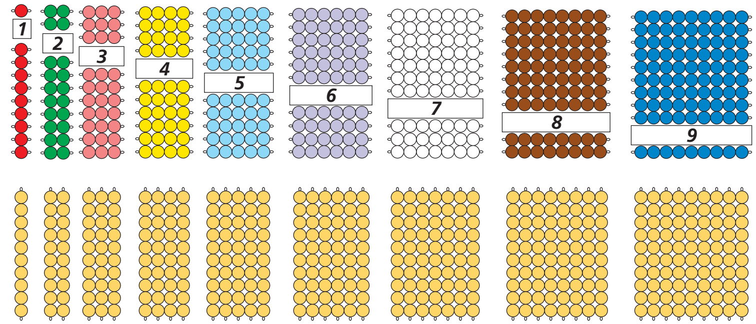


Figure 163
Multiplication by 10 with the coloured bead bars

The illustration reproduces as a whole all the numerical combinations constructed in the earlier exercises with the multiplication tables. The same products could be found by counting the units as they are being accumulated, whenever a new bar is added to the appropriate column. Nevertheless, placing all on the table provides a view that lends itself to making observations.

This is because when one takes each natural series number in turn, its square can be seen to be larger than the one before, while at the same time the height of the rectangle below is reduced. Below the unit bead is a column of nine beads. If we calculate the value of the squares, we find the numbers 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, and 81: these are the numbers indicating the limits in the multiplication chart (Figure 79). The product of the whole group of beads in each column can easily be calculated because, since there are always ten rows of bars, the series of totals is 10, 20, ..., 70, 80 and 90. And, for this reason, bars of 10 corresponding to each of the products could be placed below each column. Beyond this

63 The cards with the numbers are inserted in the space after the square, although not mentioned in the text. They are, however, in the original Spanish illustration, which is why the illustration has been reproduced here.